C0mpu3stís1m0s

Por Pablo Coll | pecoll@gmail.com

Mucha gente ha escuchado hablar de los números primos, pero pocos saben realmente cuáles son los números primos, cómo se definen, qué características tienen. ¿Por qué los maestros y profesores no le dan demasiada importancia? Seguramente porque no han tenido buenas experiencias y no les tienen suficiente cariño. Al intentar dividir a los queridos primos por los números enteros menores, nunca tenemos éxito, siempre nos sobra algún resto en la división. Esto quiere decir que los primos no tienen divisores salvo 1 y sí mismos. El 2, el 3, el 5, el 7, el 11 son los primeros primos. El 4 no es primo porque es divisible por 2. El 10 es divisible por 2 y 5, luego no es primo tampoco. El 60 es divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30, además de ser divisible por 1 y 60. A estos números, 4, 10, 60… que no son primos se los llama compuestos.

¿De qué están compuestos los números? De otros números más chicos. Si trabajáramos con sumas podríamos construir cualquier número entero sumando unos o, inversamente, descomponerlo en sumas de muchos unos, por ejemplo el 12 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1. Pero qué pasa si intentamos descomponer el 12 en productos de números. Podemos obtener 12 = 3x4, pero el 4 podemos seguir descomponiéndolo en producto de números más chicos, 4 = 2x2 con lo que 12 queda descompuesto como 12 = 2x2x3 y ya no se puede seguir porque 2 y 3 son primos. Los primos hacen las veces de átomos, cuando intentamos descomponer un número como producto de otros. Los primos son generadores de muchas preguntas y líneas para explorar calculadora en mano, pero vamos a darle una mirada a los compuestos.

Hay muchos grados de compositividad. ¿Cuáles son los números más compuestos de todos? ¿Existirán tales números? ¿O no siempre habrá un número más compuesto? Acá van un par de intentos de respuestas, pero son sólo un par de direcciones de las muchas que pueden explorarse al definir el concepto de alta compositividad.

La primera idea es hallar números con muchos divisores. Llamemos d(n) a la cantidad de divisores de un número n. Los primos se pueden definir como los números que tienen d = 2, d(4) = 3 por que 4 tiene tres divisores 1, 2 y 4 y d(60) = 12, con ayuda del primer párrafo. ¿Cuán grande puede ser d? Tanto como queramos, siempre que los números que consideremos crezcan. Una linda actividad para explorar es hallar el número menor que 10.000 con mayor valor de d. No hace falta más que saber dividir y además uno se puede auxiliar con una calculadora. Pero, ¿debemos explorar todos los números menores que 10.000? ¿Cómo podemos acotar la búsqueda? ¿Son todos candidatos?

Otra idea un poco más sofisticada es sumar los divisores del número excluyendo a sí mismo. A esta suma la llamaremos s(n). Para los primos s(n) = 1 pero cuando crece el n en general tiende a crecer el s(n). Una forma de tener una idea relativa de cantidad de divisores o compositividad es dividir s(n)/n y analizar este valor. Los números tales que s(n)/n = 1 se los llama perfectos. Aunque se sospecha que puede haber infinitos números perfectos, aún no se tiene una demostración de esta conjetura. Lo que sí se ha probado es que si son pares los números perfectos, han de ser de la forma 2^(p-1)(2^p-1) donde 2^p-1 debe ser primo. A los primos de la forma 2^p-1, se los conoce con el nombre de primos de Mersenne. En la actualidad sólo se conocen 49 de estos primos, el más grande tiene 12.978.189 de dígitos, el más chico es el 3, da lugar al 6 que es el menor número perfecto conocido, ya que 6 = 1 + 2 + 3. El siguiente primo de Mersenne 7=2^3-1 da lugar al 28=1+2+4+7+14 segundo número perfecto. Aún es un problema abierto determinar si existen o no números perfectos impares.

Los números perfectos se estudiaron desde la antigüedad. En 1631 Marin Mersenne le mandó una carta a René Descartes preguntándole si conocía algún número n tal que s(n)/n tomara valores enteros mayores que 1. Descartes tardó siete años en responderle la carta, y debió dedicar un poco de inspiración y mucho esfuerzo en ese tiempo, porque le mandó una lista con varios casos por ejemplo: s(1476304896)/1476304896 = 2 o s(30240)/30240 = 3 o s(14182439040)/14182439040 = 4. Estos números reciben el nombre de multiperfectos. Se conocen multiperfectos hasta de orden 10. En total, de todos los órdenes apenas se conocen algo más de 5.000 y se estima que no habría más de 20.000. ¿Cuáles son los dos multiperfectos de orden 2 más chicos? Pista: son menores que 1.000 y nuevamente no es necesario andar revisando todos los números del rango 1 a 1.000.

SOLUCIONES

R1: 7560. Al buscarlo no hace falta revisar todos los menores de 10000, basta comenzar la búsqueda en 5000, si hubiera un número M menor que 5000 que fuera solución, entonces 2xM sería una mejor solución. De cualquier forma, analizando los factores primos que lo podrían componer, se acorta enormemente la búsqueda. Observen que 7560 = 2^3 x 3^3 x 5 x 7, es decir está formado por los factores primos más pequeños, algunos, los más pequeños, elevados a potencias no muy grandes. La cantidad d se calcula como el producto de los exponentes a los que están elevados los factores primos aumentados en 1. En el caso del 7560, la cantidad de divisores es (3+1)x(3+1)x(1+1)x(1+1) es decir 4x4x2x2 = 64 divisores.

R2: 120, ya lo conocía Mersenne cuando le planteó el problema a Descartes en 1631, y 672, descubierto por Fermat, que también anduvo pensando el problema en esas épocas.